УДК 517.93

© **М. М. Басова**

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ — полунормированное фазовое пространство функций $\varphi : (-\infty, 0] \to E,$ удовлетворяющее аксиоматике Хейла–Като [1] и дополнительному условию

(D) если ограниченная последовательность непрерывных функций с компактным носителем $\varphi_n : (-\infty, 0] \to E, n = 1, 2, \ldots$ сходится к функции φ равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty, 0],$ то $\varphi \in \mathcal{B}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0.$

Из предположения (D) вытекает, что пространство Фреше $\mathcal{BC}((-\infty, 0], E)$ ограниченных непрерывных функций с метрикой

$$d(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-m}\|x - y\|_m}{1 + \|x - y\|_m},$$

где $\|x\|_m = \sup\limits_{t\in[-m,0]} \|x(t)\|_E,$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}.$

Для полулинейного функционально-дифференциального включения в E рассматривается общая краевая задача

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$Bx \in Cx, \tag{2}$$

где $x_t(\theta) = x(t + \theta),\ \ \theta \in (-\infty, 0]$ при следующих предположениях.

(A) Линейный оператор $A : D(A) \subseteq E \to E$ является производящим оператором C_0-полугруппы $\exp\{tA\}$.

Для мультиотображения $F : [0, T] \times \mathcal{B} \to Kv(E)$, где $Kv(E)$ означает совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E, будем предполагать выполненными условия (ср. [2]):

(F1) F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори;
(F2) семейство мультифункций $F(\cdot, y)$ равномерно интегрально ограничено при $y \in \Omega$ для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}((-\infty, 0], E);$
(F3) найдется функция $k \in L^1_+[0, T]$ такая, что для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}((-\infty, 0], E)$ выполнено для почти всех $t \in [0, T]$

$$\chi(F(t, \Omega)) \leqslant k(t)\psi_{\mathcal{BC}}(\Omega),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в $E,$ а $\psi_{\mathcal{BC}}(\Omega) = \sup\limits_{t\in(-\infty,0]} \chi(\Omega(t))$ — модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{BC}((-\infty, 0], E).$

Пусть $\mathcal{C}((-\infty, T], E)$ — пространство Фреше непрерывных функций $y : (-\infty, T] \to E$ таких, что $y_0 \in \mathcal{BC}((-\infty, 0], E).$ Для операторов из граничного условия (2) предполагается:

(B) $B : \mathcal{C}((-\infty, T], E) \to \mathcal{BC}((-\infty, 0], E)$ — линейный непрерывный оператор;
(C) мультиотображение $C : \mathcal{C}((-\infty, T], E) \to Kv(\mathcal{BC}((-\infty, 0], E))$ является полунепрерывным сверху и переводит ограниченные множества в относительно компактные.

При условиях (F1) и (F2) определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty, T], E) \to P(L^1([0, T], E)),$$

заданный как $\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^1([0, T], E) : f(t) \in F(t, x_t)$ п.в. $t \in [0, T]\}$ (см., например, [3]).

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00100

О п р е д е л е н и е 1. *Интегральным решением* задачи (1), (2) называется функция $x \in \mathcal{C}((-\infty, T], E)$ такая, что: $Bx \in Cx$;

$$x(t) = \exp\{tA\}x(0) + \int_0^t \exp\{(t-s)A\}f(s)ds, \quad t \in [0,T], \;\; f \in \mathcal{P}_F(x).$$

Обозначим через $\mathcal{C}_0$ подпространство $\mathcal{C}((-\infty, T], E)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию $x(t) = \exp\{tA\}x(0)$, $t \in [0,T]$ и обозначим B_0 сужение B на $\mathcal{C}_0$. Пусть также $G : L^1([0,T], E) \to \mathcal{C}((-\infty, T], E)$ — линейный оператор, определенный при $t \in [0,T]$ равенством $Gf(t) = \displaystyle\int_0^t \exp\{(t-s)A\}f(s)ds$ и $Gf(t) = 0$, если $t \in (-\infty, 0]$.

Наше основное предположение на операторы B и C будет заключаться в следующем.

(BC) Существует линейный непрерывный оператор $\Lambda : \mathcal{BC}((-\infty, 0], E) \to \mathcal{C}_0$ такой, что $(I - B_0\Lambda)(y - BGf) = 0$ для любых $x \in \mathcal{C}((-\infty, T], E)$, $y \in C(x)$ и $f \in \mathcal{P}_F(x)$.

В предположении, что условие (BC) выполнено, рассмотрим многозначный оператор

$$\Gamma : \mathcal{C}((-\infty, T], E) \to Kv(\mathcal{C}((-\infty, T], E)),$$

заданный следующим образом: $\Gamma(x) = \Lambda C(x) + (I - \Lambda B)G\mathcal{P}_F(x)$.

Т е о р е м а 1. *Неподвижные точки мультиоператора* Γ *являются интегральными решениями задачи* $(1), (2)$.

Рассмотрим векторную меру некомпактности ν на пространстве $\mathcal{C}((-\infty, T], E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$ с естественной частичной упорядоченностью $\nu(\Omega) = (\psi_{\mathcal{C}}(\Omega), \mathrm{mod}_c(\Omega))$, где $\psi_{\mathcal{C}}$ — модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{C}((-\infty, T], E)$, а

$$\mathrm{mod}_c(\Omega)) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| < \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|$$

— модуль равностепенной непрерывности.

В докладе описываются условия, при которых мультиоператор Γ будет являться ν-уплотняющим на ограниченных подмножествах Ω из $\mathcal{C}((-\infty, T], E)$ и следовательно, к нему будет применима соответствующая теория топологической степени (см. [4], [2]). В рамках этой теории мы можем сформулировать следующий общий принцип.

Т е о р е м а 2. *Пусть ограниченное множество* $\Omega \subset \mathcal{C}((-\infty, T], E)$ *таково, что интегральный мультиоператор* Γ *не имеет неподвижных точек на границе* $\partial\Omega$ *и степень мультиполя* $\deg(i - \Gamma, \overline{\Omega})$ *отлична от нуля. Тогда множество интегральных решений задачи* $(1), (2)$, *содержащихся в* Ω, *непусто.*

В докладе рассматривается ряд конкретных реализаций этого принципа, в частности, изучаются условия разрешимости периодической задачи.

Список литературы

1. Hino Y., Murakami S., Naito T. Functional Differential Equations with Infinite Delay. Lecture Notes in Math. 1473. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
2. Kamenskii M, Obukhovskii V, Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001.
3. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
4. Обуховский В. В. О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. 1971. Т. 4. С. 70–79.

Басова Марина Михайловна
Воронежский государственный университет,
Россия, Воронеж
e-mail: basova_marina@mail.ru